Geben Sie Ihre Lösungen zu den Aufgaben in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 1.1 (10 Punkte). Sei $\omega \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\omega \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$$

und folgern Sie, dass die Matrix A über $\mathbb{R}$ trigonalisierbar ist.

(b) Bestimmen Sie ein $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, sodass $S^{-1}AS$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

(c) Lösen Sie das DGL-System

$$v'(t) = A \cdot v(t) \quad \text{mit dem Anfangswert} \quad v(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1.2 (10 Punkte). Sei $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ mit $A^2 = \mathbf{1}$. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) Entweder ist $A = \pm \mathbf{1}$.

(b) Oder $A = S^{-1}DS$ für eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 1.3 (10 Punkte). Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K. Zeigen Sie, dass für *diagonalisierbare* Endomorphismen $f \in \mathrm{End}_K(V)$ gilt:

(a) Ein Untervektorraum $U \subseteq V$ ist f-invariant genau dann, wenn er eine direkte Summe

$$U = \bigoplus_{\lambda} U_\lambda$$

von Untervektorräumen $U_\lambda \subseteq \ker(f - \lambda \cdot \mathrm{id})$ der Eigenräume von f ist.

(b) Zu jedem f-invarianten Untervektorraum $U \subseteq V$ gibt es ein f-invariantes Komplement, d.h. einen ebenfalls f-invarianten Untervektorraum $W \subseteq V$ mit der Eigenschaft

$$V = U \oplus W$$

Die folgenden Aufgaben sind nicht schriftlich abzugeben, sondern zur Diskussion in den Übungsgruppen bestimmt.

Aufgabe 1.4 (keine Abgabe). Ein Gewicht sei an einer Feder aufgehängt. Sei $y(t)$ seine Auslenkung aus der Ruhelage zur Zeit t. Zur Zeit $t = 0$ ziehen wir es an die Stelle $y(0) = 1$ und lassen es los, ohne anzuschubsen. Seine weitere Bewegung ist durch die DGL

$$y''(t) + 2\mu y'(t) + \omega^2 y(t) \;=\; 0 \quad \text{mit Anfangswerten} \quad \begin{cases} y(0) \;=\; 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

bestimmt, wobei $\omega, \mu \in \mathbb{R}_{>0}$ Konstanten sind.

(a) Sei $v(t) \in \mathbb{R}^2$ der Vektor mit Einträgen $y(t), y'(t)$. Zeigen Sie, dass die DGL äquivalent ist zu

$$v'(t) \;=\; A \cdot v(t) \quad \text{mit} \quad A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\mu \end{pmatrix}, \quad v(0) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Für $\mu > \omega$ ist A diagonalisierbar über $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie in diesem Fall eine Basis aus reellen Eigenvektoren und nutzen Sie diese zur Lösung der DGL.

(c) Für $\mu < \omega$ ist A diagonalisierbar über $\mathbb{C}$. Bestimmen Sie in diesem Fall eine Basis aus komplexen Eigenvektoren, und lösen Sie die DGL durch Betrachten des Real- und Imaginärteils von komplexwertigen Lösungen.

Hinweis: Der Fall $\mu = \omega$ soll nicht hier, sondern in Aufgabe 1.1 behandelt werden.

Aufgabe 1.5 (keine Abgabe). Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ nilpotent, d.h. $A^k = 0$ für eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt, sodass

$$S^{-1}AS \;=\; \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

obere Dreiecksform mit Nullen auf der Diagonale hat, und berechnen Sie $\chi_A(t)$.

Geben Sie Ihre Lösungen zu den Aufgaben in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 2.1 (10 Punkte). Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(5 \times 5, \mathbb{C}).$$

Bestimmen Sie

(a) ein $S \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{C})$, sodass $S^{-1}AS$ in Jordan-Normalform ist,

(b) die Jordan-Normalform von B (mit möglichst wenig Rechenaufwand).

Aufgabe 2.2 (10 Punkte). Sei K ein Körper. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$V = \{p(t) \in K[t] \mid \deg(p(t)) \leq n\} \subset K[t]$$

der Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens n, und es sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ definiert durch

$$f(p(t)) = p(t+1).$$

(a) Zeigen Sie, dass f über K trigonalisierbar ist.

(b) Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von f über $K = \mathbb{C}$.

(c) Wie sieht für $n = 2$ die Jordan-Normalform von f über $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ aus?

Aufgabe 2.3 (10 Punkte). Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass für diagonalisierbare $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ äquivalent sind:

  (i) Es ist $AB = BA$.

  (ii) Es gibt einen Basiswechsel, der A und B zugleich in Diagonalform bringt.

(b) Sei nun $n > 1$, und der Körper K habe mindestens drei verschiedene Elemente. Finden Sie trigonalisierbare Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ mit $AB = BA$, die *kein* Basiswechsel gleichzeitig in Jordan-Normalform bringen kann.

Zusatzaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind nicht schriftlich abzugeben, sondern zur Diskussion in den Übungsgruppen bestimmt.

Aufgabe 2.4 (keine Abgabe). Sei K ein Körper.

(a) Zeigen Sie: Für jede nilpotente Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ ist $A^n = 0$.

(b) Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ zwei nilpotente Matrizen. Zeigen Sie:

- Wenn $AB = BA$ ist, sind auch die Matrizen $A + B$ und AB nilpotent.
- Für Matrizen mit $AB \neq BA$ gilt diese Aussage im Allgemeinen nicht.

Aufgabe 2.5 (keine Abgabe). Sei $A \in \mathrm{Mat}(23 \times 23, \mathbb{C})$ mit

$$\dim_{\mathbb{C}} \ker(A - 2 \cdot \mathbf{1})^{\nu} \;=\; 7, 13, 16, 19, 21, 23, \ldots \quad \text{für} \quad \nu \;=\; 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

Wie sieht dann die Jordansche Normalform der Matrix A aus?

Aufgabe 2.6 (keine Abgabe).

(a) Gegeben sei die Matrix

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \;\in\; \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

Berechnen Sie die Dimension von $\ker(A - \lambda\mathbf{1})^e$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $e \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie, dass A trigonalisierbar ist. Wie sieht ihre Jordan-Normalform aus?

(c) Bestimmen Sie ein $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ mit SAS^{-1} in Jordan-Normalform.

Geben Sie Ihre Lösungen zu den Aufgaben in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 3.1 (10 Punkte).

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(4 \times 4, \mathbb{C}).$$

(b) Sind die Matrizen zueinander ähnlich? Bestimmen Sie ihre Jordan-Normalform.

Aufgabe 3.2 (10 Punkte). Sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Für $A \in \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ sei $Z(A) = \{B \in \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) \mid AB = BA\}$. Zeigen Sie

$$\dim_{\mathbb{C}} Z(A) \geq n.$$

(b) Beschreiben Sie alle Matrizen $A \in \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ mit $\dim_{\mathbb{C}} Z(A) = n$.

Hinweis: Ihre Antwort sollte nur von der Jordan-Normalform von A abhängen.

Aufgabe 3.3 (10 Punkte). Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(3 \times 3, \mathbb{C}).$$

Berechnen Sie

(a) die additive Jordan-Chevalley Zerlegung von A,

(b) die Potenzen A^k für alle $k \in \mathbb{N}$ und die Matrix $\exp(A) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \cdot A^k$.

Zusatzaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind nicht schriftlich abzugeben, sondern zur Diskussion in den Übungsgruppen bestimmt.

Aufgabe 3.4 (keine Abgabe).

(a) Beschreiben Sie alle Ähnlichkeitsklassen von Matrizen in $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$. Wie sieht jeweils das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom aus?

(b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 2 \\ -10 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Welche dieser Matrizen sind zueinander ähnlich, welche sind diagonalisierbar?

Aufgabe 3.5 (keine Abgabe).

(a) Zeigen Sie, dass für $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ äquivalent sind:

- Die Matrix A ist über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.
- Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$, sodass A^m über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist.

(b) Gilt dasselbe auch für reelle Matrizen und Diagonalisierbarkeit über $\mathbb{R}$?

Aufgabe 3.6 (keine Abgabe). Gibt es $A, B \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{C})$ mit

$$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^5 + 5B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}?$$

Geben Sie Ihre Lösungen zu den Aufgaben in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 4.1 (10 Punkte).

(a) Was besagt der Satz von Cayley-Hamilton für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})?$$

(b) Benutzen Sie dies, um die Matrixpotenz $A^{12} \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ zu bestimmen, ohne dabei ein einziges Matrizenprodukt von Hand auszurechnen.

Aufgabe 4.2 (10 Punkte). Finden Sie alle differenzierbaren Funktionen

$$f_\nu\colon \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (\nu = 1, 2, 3),$$

die das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} f_1' &= f_2 + 2f_3 \\ f_2' &= f_1 + f_2 + 3f_3 \\ f_3' &= -f_1 - f_3 \end{aligned}$$

erfüllen und zudem der Randbedingung $f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = 1$ genügen.

Aufgabe 4.3 (10 Punkte).

(a) Berechnen Sie $\exp(tA)$ für $t \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}).$$

(b) Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$.

- Zeigen Sie: Im Fall $AB = BA$ gilt $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.
- Finden Sie $A, B \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$ mit $\exp(A + B) \neq \exp(A)\exp(B)$.

Zusatzaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind nicht schriftlich abzugeben, sondern zur Diskussion in den Übungsgruppen bestimmt.

Aufgabe 4.4 (keine Abgabe).

(a) Verifizieren Sie den Satz von Cayley-Hamilton durch explizites Nachrechnen für Matrizen

$$A \;=\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\in\; \mathrm{Mat}(2 \times 2, K).$$

(b) Was besagt der Satz von Cayley-Hamilton für Dreiecksmatrizen? Beweisen Sie den Satz für beliebige trigonalisierbare Matrizen durch direktes Nachrechnen, ohne die Jordan-Normalform zu benutzen.

Aufgabe 4.5 (keine Abgabe). Sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ eine Matrix mit charakteristischem Polynom

$$\chi_A(t) \;=\; t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots + c_0.$$

Wir bezeichnen die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte erhaltene Matrix mit

$$A_{ij} \;\in\; \mathrm{Mat}\big((n-1) \times (n-1), K\big).$$

Zeigen Sie, dass für die Matrix $A^* = (a^*_{ij})$ mit den Einträgen $a^*_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ji})$ gilt:

$$A^* \;=\; (-1)^{n+1} \cdot \big(A^{n-1} + c_{n-1}A^{n-2} + \cdots + c_2 A + c_1 \mathbf{1}\big)$$

Aufgabe 4.6 (keine Abgabe). Zeigen Sie, dass für Endomorphismen $f \in \mathrm{End}_K(V)$ eines endlich-dimensionalen K-Vektorraumes die folgenden Eigenschaften äquivalent zueinander sind:

(a) Die Abbildung f ist eine Projektion, d.h. es gibt Untervektorräume $V_1, V_2 \subseteq V$ mit

$$V \;=\; V_1 \oplus V_2 \quad \text{und} \quad f(v_1 + v_2) \;=\; v_1 \quad \text{für alle} \quad v_1 \in V_1, v_2 \in V_2.$$

(b) Das Minimalpolynom $\mu_f(t)$ ist ein Teiler von $t^2 - t$.

Geben Sie Ihre Lösungen zu den Aufgaben in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 5.1 (10 Punkte). Sei V ein K-Vektorraum mit einer Basis $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$, und bezüglich dieser Basis sei eine Bilinearform $b\colon V \times V \to K$ gegeben durch die Gram-Matrix

$$\mathrm{Gram}_{\mathcal{A}}(b) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass auch

$$\mathcal{B} \;=\; (v_2 + v_3, v_1 + v_2, v_3)$$

eine Basis von V ist, und berechnen Sie die zugehörige Gram-Matrix $\mathrm{Gram}_{\mathcal{B}}(b)$.

Aufgabe 5.2 (10 Punkte). Sei V ein Vektorraum der Dimension $n < \infty$ über K, und sei

$$b\colon \quad V \times V \;\longrightarrow\; K$$

eine Bilinearform. Zeigen Sie, dass es Linearformen $f_i, g_i \in V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ gibt mit

$$b(v, w) \;=\; \sum_{i=1}^{n} f_i(v)\, g_i(w) \quad \text{für alle} \quad v, w \;\in\; V.$$

Aufgabe 5.3 (10 Punkte). Auf $\mathbb{R}^3$ betrachte man das Standardskalarprodukt.

(a) Zeigen Sie, dass es für je zwei affine Unterräume $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2 \subset \mathbb{R}^3$ Vektoren $v_i \in \mathbb{A}_i$ gibt mit

$$\|v_1 - v_2\| \;=\; \min\{\, \|w_1 - w_2\| \colon w_i \in \mathbb{A}_i \text{ für } i = 1, 2 \,\}.$$

Unter welcher Bedingung an $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ sind dabei v_1, v_2 eindeutig bestimmt?

(b) Finden Sie den Abstand $d(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2) := \min\{\, \|w_1 - w_2\| \colon w_i \in \mathbb{A}_i \text{ für } i = 1, 2 \,\}$ für

$$\mathbb{A}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathbb{A}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die folgenden Aufgaben sind nicht schriftlich abzugeben, sondern zur Diskussion in den Übungsgruppen bestimmt.

Aufgabe 5.4 (keine Abgabe). Zeigen Sie für das Standardskalarprodukt:

(a) Für affine Unterräume $\mathbb{A} = u + \mathbb{R}v_1 + \cdots + \mathbb{R}v_d \subset \mathbb{R}^n$ und $w \in \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

- Es ist $\langle w, v_i \rangle = 0$ für $i = 1, \ldots, d$.
- Es ist $\langle w, x_1 - x_2 \rangle = 0$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{A}$.

Wenn diese Bedingungen gelten, schreiben wir auch kurz $w \perp \mathbb{A}$.

(b) Zu jedem $v \in \mathbb{R}^n$ gibt es genau einen Vektor $v_{\mathbb{A}} \in \mathbb{A}$ mit $(v - v_{\mathbb{A}}) \perp \mathbb{A}$. Dieser ist charakterisiert durch

$$\|v - v_{\mathbb{A}}\| \;=\; \min\bigl\{\|v - x\| \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{A}\bigr\}.$$

(c) Das obige Minimum nennt man den Abstand $d(v, \mathbb{A})$. Finden Sie eine Formel für diesen Abstand für $n = 2$ und

$$\mathbb{A} \;=\; \bigl\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\bigr\} \quad \text{mit} \quad a, b, c \;\in\; \mathbb{R}.$$

Aufgabe 5.5 (keine Abgabe). Sei V ein Vektorraum endlicher Dimension über K.

(a) Für beliebige Bilinearformen $b\colon V \times V \to K$ sei $b_L \in \mathrm{Hom}_K(V, V^*)$ definiert durch $b_L(v) = b(v, -)$. Zeigen Sie: Die so erhaltene Abbildung $b \mapsto b_L$ ist eine Bijektion

$$\{\,\text{Bilinearformen } b\colon V \times V \longrightarrow K\,\} \;\xrightarrow{\sim}\; \mathrm{Hom}_K(V, V^*).$$

(b) Zeigen Sie, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind:

(1) b_L ist ein Isomorphismus.
(2) Zu jedem $v \in V \setminus \{0\}$ gibt es ein $w \in V$ mit $b(v, w) \neq 0$.
(3) Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V mit $\mathrm{Gram}_{\mathcal{B}}(b) \in \mathrm{GL}_n(K)$.
(4) Für jede Basis $\mathcal{B}$ von V ist $\mathrm{Gram}_{\mathcal{B}}(b) \in \mathrm{GL}_n(K)$.

Wenn diese Eigenschaften gelten, bezeichnet man b als *nichtausgeartet*.

(c) Zeigen Sie: Für $K = \mathbb{R}$ ist jede positiv oder negativ definite Bilinearform nichtausgeartet im obigen Sinn. Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage?

Geben Sie Ihre Lösungen zu den Aufgaben in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 6.1 (10 Punkte).

(a) Sei $V = \mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt. Wenden Sie das Gram-Schmidt Verfahren auf

$$u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

an, und finden Sie alle Vektoren, welche das erhaltene Orthonormalsystem zu einer Orthonormalbasis des Euklidischen Vektorraums V ergänzen.

(b) Sei $V = \mathbb{R}[t]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Wenden Sie das Gram-Schmidt Verfahren auf die Polynome $1, t, t^2 \in V$ an.

Aufgabe 6.2 (10 Punkte). Sei $V = \{\, \text{stetige Funktionen } f : [-1,1] \to \mathbb{R} \,\}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx, \quad \text{und} \quad e_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{für } n = 0, \\ \cos(n\pi x) & \text{für } n \geq 1. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Orthonormalsystem in V ist.

(b) Sei $f(x) = 1 - |x|$. Finden Sie die Orthogonalprojektion des Vektors $f \in V$ auf den Untervektorraum

$$U_n := \mathbb{R}e_0 + \cdots + \mathbb{R}e_n \subseteq V \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N},$$

und plotten Sie die erhaltenen Funktionen $p_{U_n}(f) \colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ für $n = 1, 3, 5$.

Aufgabe 6.3 (10 Punkte). Sei $V = \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(a) Auf V definiert die Spur eine symmetrische Bilinearform $\langle A, B \rangle := \mathrm{tr}(AB)$.

(b) Die Unterräume $U_+ = \{A \in V \mid A^t = A\}$ und $U_- = \{A \in V \mid A^t = -A\}$ der symmetrischen bzw. antisymmetrischen Matrizen haben bezüglich dieser Bilinearform die Orthokomplemente $U_+^\perp = U_-$ und $U_-^\perp = U_+$.

(c) Die Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist positiv definit auf U_+ und negativ definit auf U_-.

Zusatzaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind nicht schriftlich abzugeben, sondern zur Diskussion in den Übungsgruppen bestimmt.

Aufgabe 6.4 (keine Abgabe). Sei $(v_1, \ldots, v_r)$ ein orthonormales System von Vektoren in einem endlich-dimensionalen Euklidischen oder unitären Vektorraum V. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(a) $(v_1, \ldots, v_r)$ ist eine Basis von V.

(b) Für alle $v \in V$ gilt: Wenn $\langle v_i, v \rangle = 0$ für alle i ist, folgt $v = 0$.

(c) Für alle $v \in V$ gilt $v = \sum_{i=1}^r \langle v_i, v \rangle \cdot v_i$.

(d) Für alle $v, w \in V$ gilt $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^r \langle v, v_i \rangle \cdot \langle v_i, w \rangle$.

(e) Für alle $v \in V$ gilt $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^r |\langle v, v_i \rangle|^2$.

Aufgabe 6.5 (keine Abgabe). Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(a) Zeigen Sie, dass für symmetrische Bilinearformen $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ äquivalent sind:

- Die Bilinearform ist (positiv oder negativ) semidefinit.
- Für jedes $u \in V$ mit $\langle u, u \rangle = 0$ gilt sogar $\langle u, v \rangle = 0$ für alle $v \in V$.
- Die Teilmenge $U := \{u \in V \mid \langle u, u \rangle = 0\} \subseteq V$ ist ein Untervektorraum.

(b) Sei nun $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv semidefinit. Sei $U \subseteq V$ wie oben definiert. Folgern Sie, dass

$$V/U \times V/U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad ([v_1], [v_2]) \mapsto \langle v_1, v_2 \rangle$$

ein wohldefinierte positiv definite symmetrische Bilinearform auf V/U ist.

Aufgabe 6.6 (keine Abgabe). Eine Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ heißt *stückweise stetig*, wenn sie in höchstens endlich vielen Punkten unstetig ist. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller solcher Funktionen. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle \cdot, \cdot \rangle\colon \quad V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

eine positiv semidefinite Bilinearform auf V definiert wird, und bestimmen Sie den Untervektorraum

$$U := \{ u \in V \mid \langle u, u \rangle = 0 \} \subseteq V.$$

Geben Sie Ihre Lösungen zu den Aufgaben in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 7.1 (10 Punkte). Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Für $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{C})$ betrachte man die Matrizen

$$B := \mathbf{1} - A^\dagger A \quad \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}),$$

$$C := \begin{pmatrix} \mathbf{1} & A \\ A^\dagger & \mathbf{1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}\big((m+n) \times (m+n), \mathbb{C}\big).$$

Zeigen Sie:

(a) Die Matrizen B und C sind hermitesch.

(b) Es ist B positiv definit genau dann, wenn C positiv definit ist.

Aufgabe 7.2 (10 Punkte).

(a) Bestimmen Sie alle oberen Dreiecksmatrizen in der orthogonalen bzw. unitären Gruppe

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^t A = \mathbf{1}\} \text{ bzw. } \mathrm{U}(n) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^\dagger A = \mathbf{1}\}.$$

(b) Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ hermitesche Matrizen. Zeigen Sie:

i) AB ist hermitesch genau dann, wenn $AB = BA$ gilt.

ii) Für jede unitäre Matrix $S \in \mathrm{U}(n)$ ist auch SAS^{-1} hermitesch.

Aufgabe 7.3 (10 Punkte). Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $A^k \in \mathrm{O}(n)$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt und

$$\beta\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \beta(v, w) := \langle v, w \rangle + \langle Av, Aw \rangle + \cdots + \langle A^{k-1}v, A^{k-1}w \rangle.$$

Zeigen Sie, dass β ein Skalarprodukt ist und dass $\beta(Av, Aw) = \beta(v, w)$ gilt.

(b) Folgern Sie durch Betrachten einer Orthonormalbasis bezüglich β, dass es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ gibt mit

$$S^{-1}AS \in \mathrm{O}(n).$$

Die folgenden Aufgaben sind nicht schriftlich abzugeben, sondern zur Diskussion in den Übungsgruppen bestimmt.

Aufgabe 7.4 (keine Abgabe).

(a) Welche der folgenden Matrizen sind positiv definit, welche negativ definit?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$D_n = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{R}).$$

positiv definit, für welche ist sie negativ definit?

Aufgabe 7.5 (keine Abgabe). Zeigen Sie, dass für $A \in \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ äquivalent sind:

(a) Die Matrix A ist hermitesch und positiv definit, d.h.

$$\beta\colon \quad \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \quad (u, v) \mapsto \overline{u}^{\mathsf{t}} \cdot A \cdot v \quad \text{ist ein Skalarprodukt.}$$

(b) Es gibt eine invertierbare Matrix $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit $A = B^\dagger \cdot B$.

Aufgabe 7.6 (keine Abgabe). Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt.

(a) Sei $f\colon V \to V$ eine Isometrie mit $\det(f) = 1$. Für die Standardbasis (e_1, e_2, e_3) gelte

$$f(e_3) = e_3 \quad \text{und} \quad f(e_1) = \tfrac{1}{2}\, e_1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\, e_2 + \lambda\, e_3 \quad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von f bezüglich der Standardbasis.

(b) Was ist die geometrische Bedeutung der obigen Isometrie?

Geben Sie Ihre Lösungen zu den Aufgaben in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 8.1 (10 Punkte). Sei V ein Euklidischer Vektorraum.

(a) Zeigen Sie: Für jedes $u \in V$ mit $\|u\| = 1$ ist die Abbildung

$$s_u\colon \quad V \longrightarrow V, \quad v \mapsto v - 2\langle u, v\rangle \cdot u$$

eine Isometrie (wir nennen Isometrien von dieser Form auch *Spiegelungen*).

(b) Für $n = \dim_{\mathbb{R}}(V) < \infty$ seien $u_1, \dots, u_n \in V$ mit $\|u_1\| = \cdots = \|u_n\| = 1$ gegeben. Zeigen Sie, dass folgende zwei Aussagen zueinander äquivalent sind:

(i) $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ ist eine Orthonormalbasis von V.

(ii) Es ist $s_1 \circ \cdots \circ s_n = -\mathrm{id}_V$ für die Spiegelungen $s_i = s_{u_i}$.

Tipp: Betrachten Sie $(s_1 \circ \cdots \circ s_n)(u)$ für $u \in U^\perp$ mit $U = \mathbb{R}u_2 + \cdots + \mathbb{R}u_n$.

Aufgabe 8.2 (10 Punkte). Zeigen Sie, dass die Matrix[1]

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \mathbf{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & \mathbf{-4} & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$$

invertierbar ist, und finden Sie ihre Iwasawa-Zerlegung $A = QDR$ als Produkt einer orthogonalen Matrix Q, einer Diagonalmatrix D mit positiven reellen Einträgen auf der Diagonalen, und einer unipotenten oberen Dreiecksmatrix U.

Aufgabe 8.3 (10 Punkte). Seien V_1, V_2 unitäre Vektorräume.

(a) Zeigen Sie, dass $V := V_1 \oplus V_2$ ein unitärer Vektorraum ist mit

$$\big\langle v_1 + v_2, w_1 + w_2 \big\rangle := \langle v_1, w_1\rangle_1 + \langle v_2, w_2\rangle_2 \quad \text{für} \quad v_i, w_i \in V_i,$$

wobei wir mit $\langle\cdot,\cdot\rangle_i\colon V_i \times V_i \to \mathbb{C}$ das Skalarprodukt auf V_i bezeichnen.

(b) Bestimmen Sie die zu der Projektionsabbildung

$$f\colon \quad V \longrightarrow V_1, \quad v_1 + v_2 \mapsto v_1$$

adjungierte lineare Abbildung $f^\dagger \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1, V)$.

[1] Die Matrix A hatte in einer früheren Version dieser Aufgabe zwei falsche Einträge: Statt der rot markierten Einträge 3 und -4 standen dort -1 und 1. Am Prinzip der Aufgabe ändert das nichts, aber es macht die Zahlenwerte in der Rechnung etwas unangenehmer. Wenn Sie die Aufgabe schon für die alte Matrix A gelöst haben, gibt es natürlich auch dafür volle Punktzahl.

Die folgenden Aufgaben sind nicht schriftlich abzugeben, sondern zur Diskussion in den Übungsgruppen bestimmt.

Aufgabe 8.4 (keine Abgabe). Eine *Permutationsmatrix* ist eine Matrix

$$A_\sigma \;:=\; \begin{pmatrix} | & & | \\ e_{\sigma(1)} & \cdots & e_{\sigma(n)} \\ | & & | \end{pmatrix} \;\in\; \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}),$$

deren Spalten durch Anwenden einer Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ auf die Standardbasis entstehen. Zeigen Sie:

(a) Alle Permutationsmatrizen liegen in der orthogonalen Gruppe $O(n)$.

(b) Die Abbildung $\mathfrak{S}_n \to O(n), \sigma \mapsto A_\sigma$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

(c) Jede orthogonale Matrix $A = (a_{ij}) \in O(n)$ mit der Eigenschaft $a_{ij} \geq 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ ist eine Permutationsmatrix.

Aufgabe 8.5 (keine Abgabe). Sei

$$A \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \;\in\; \mathrm{Mat}(4 \times 3, \mathbb{R}).$$

(a) Prüfen Sie nach, dass die Matrix A vollen Rang hat, und bestimmen Sie eine Orthonormalbasis für die von ihren Spalten aufgespannten Vektorraum.

(b) Bestimmen Sie Zerlegung $A = QR$ als Produkt einer Matrix $Q \in \mathrm{Mat}(4 \times 3, \mathbb{R})$ mit $Q^t \cdot Q = \mathbf{1}$ und einer oberen Dreiecksmatrix $R \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$.

Aufgabe 8.6 (keine Abgabe).

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

auf $V = \mathbb{C}^2$ ein Skalarprodukt $\beta\colon V \times V \to \mathbb{C}, (v, w) \mapsto \overline{v}^t \cdot A \cdot w$ definiert.

(b) Bestimmen Sie die (bezüglich β) adjungierte Abbildung $f^\dagger \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ der linearen Abbildung

$$f\colon \quad V \longrightarrow V, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\mapsto\; \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}.$$

Geben Sie Ihre Lösungen zu den Aufgaben in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 9.1 (10 Punkte). Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(a) Wenn A symmetrisch und nilpotent ist, dann gilt $A = 0$.

(b) Wenn A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist und $A^t = -A$ gilt, dann ist $A = 0$.

Aufgabe 9.2 (10 Punkte). Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine eindeutige Zerlegung $A = H + S$ mit

- $H \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ Hermitesch, d.h. $H^\dagger = H$,
- $S \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ schief-Hermitesch, d.h. $S^\dagger = -S$.

(b) Die Matrix A ist genau dann normal, wenn $HS = SH$ gilt.

Aufgabe 9.3 (10 Punkte).

(a) Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie, dass es genau eine symmetrische und positiv definite Matrix $B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ gibt mit

$$B^2 = A.$$

(b) Bestimmen Sie diese positiv definite symmetrische Quadratwurzel B für $n = 3$ und

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Die folgenden Aufgaben sind nicht schriftlich abzugeben, sondern zur Diskussion in den Übungsgruppen bestimmt.

Aufgabe 9.4 (keine Abgabe). Jede reelle symmetrische Matrix ist normal. Zeigen Sie, dass eine nicht symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ genau dann normal ist, wenn gilt:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R} \text{ und } b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Aufgabe 9.5 (keine Abgabe). In dieser Aufgabe geht es um die Lösung inhomogener LGS mit symmetrischer positiv definiter Koeffizientenmatrix:

(a) Zeigen Sie, dass jede symmetrische positiv definite Matrix $B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ eine Zerlegung

$$B = L \cdot L^t \quad \text{mit einer linken unteren Dreiecksmatrix} \quad L \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$$

hat. Aus einer solchen sogenannten *Cholesky-Zerlegung* kann für $v \in \mathbb{R}^n$ die Lösung des LGS $B \cdot x = v$ wie folgt abgelesen werden:

- Man bestimmt $y \in \mathbb{R}^n$ mit $L \cdot y = v$ durch Vorwärtseinsetzen.
- Man bestimmt $x \in \mathbb{R}^n$ mit $L^t \cdot x = y$ durch Rückwärtseinsetzen.

(b) Berechnen Sie eine Cholesky-Zerlegung von

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9.6 (keine Abgabe). Lineare Gleichungssysteme mit symmetrischer positiv definiter Koeffizientenmatrix wie in der obigen Aufgabe treten beispielsweise bei der Minimierung der Summe von Fehlerquadraten auf. Seien dazu $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ mit $\mathrm{rk}(A) = n$ und $u \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) Die symmetrische Matrix $B = A^t A$ ist positiv definit.

(b) Für $x \in \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

- $\|Ax - u\| = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \|Ay - u\|$.
- $Bx = v$ für die Matrix $B = A^t A$ und den Vektor $v = A^t u$.

Tipp: Sei $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Wann hat $\|A(x + tz) - u\|^2$ ein Minimum in $t = 0$?

Geben Sie Ihre Lösungen zu den Aufgaben in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 10.1 (10 Punkte). Sei $A \in \mathrm{Mat}(n\times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix, $v \in \mathbb{R}^n$ und $d \in \mathbb{R}$. Für $A \neq 0$ nennen wir

$$Q \;=\; \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x^t A x + v^t x + d = 0 \,\}$$

eine *Quadrik* in n Variablen. Zeigen Sie:

(a) Für $y \in \mathbb{R}^n$ sind folgende beiden Eigenschaften äquivalent:

  (1) Für alle $z \in \mathbb{R}^n$ gilt: $y + z \in Q \;\Leftrightarrow\; y - z \in Q$.

  (2) Für alle $x \in Q$ ist auch $2y - x \in Q$.

  Wenn diese Eigenschaften gelten, nennen wir y einen *Mittelpunkt* von Q.

(b) Jeder Punkt $y \in \mathbb{R}^n$ mit $2Ay + v = 0$ ist ein Mittelpunkt von Q.

Aufgabe 10.2 (10 Punkte). Bestimmen Sie für folgende Quadriken $Q_i \subset \mathbb{R}^2$ ihren Mittelpunkt, verschieben Sie das Koordinatensystem in diesen Mittelpunkt und finden Sie in den neuen Koordinaten die Hauptachsen der Quadrik. Skizzieren Sie dann die Quadrik in der reellen Ebene:

(a) $Q_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4xy + 2x + y^2 = 3\}$.

(b) $Q_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 8x^2 + 17y^2 + 8 + 12xy - 16x - 12y = 5\}$.

Aufgabe 10.3 (10 Punkte). Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$, und es seien $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ ihre Singulärwerte, wobei wir zur Vereinfachung der Notation diesmal auch Null als Singulärwert zählen. Sei

$$M \;=\; \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^\dagger & 0 \end{pmatrix} \;\in\; \mathrm{Mat}(2n \times 2n, \mathbb{C}).$$

Zeigen Sie:

(a) M ist ähnlich zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & D \\ D & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad D \;=\; \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

(b) M besitzt genau die Eigenwerte $\pm\lambda_1, \ldots, \pm\lambda_n$.

Die folgenden Aufgaben sind nicht schriftlich abzugeben, sondern zur Diskussion in den Übungsgruppen bestimmt.

Aufgabe 10.4 (keine Abgabe). Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von $C = A^t A$ und eine Singulärwertzerlegung

$$A = S \cdot D \cdot T \quad \text{mit} \quad S \in \mathrm{O}(3),\ T \in \mathrm{O}(2),\ D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_1 \geq \lambda_2 > 0.$$

Welche Approximation von A erhält man hier, wenn man den Wert λ_2 weglässt?

Aufgabe 10.5 (keine Abgabe). Nicht für jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{C})$ existiert ein Rechtsinverses, denn nicht jedes inhomogene LGS ist lösbar. Eine Annäherung an ein Rechtsinverses kann man jedoch wie folgt finden: Seien $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$ die Singulärwerte von A. Man schreibe

$$A = S \cdot D \cdot T \quad \text{mit} \quad S \in U(m),\ T \in U(n),\ D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & \end{pmatrix}$$

und setze

$$A^- = T^\dagger \cdot \Delta \cdot S^\dagger \quad \text{mit} \quad \Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r^{-1} & \\ & & & \end{pmatrix}.$$

Sei nun $b \in \mathbb{C}^m$ beliebig. Zeigen Sie, dass für den Vektor $x = A^- \cdot b$ gilt:

(a) $\|Ax - b\| = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \|Ay - b\|$.

(b) $\|x\| \leq \|y\|$ für alle $y \in \mathbb{C}^n$ mit $\|Ay - b\| = \|Ax - b\|$.

Aufgabe 10.6 (keine Abgabe). Zeigen Sie, dass die Matrix $B = A^- \in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{C})$ aus der vorigen Aufgabe die folgenden Eigenschaften besitzt und durch diese bereits eindeutig bestimmt ist:

(a) Es ist $ABA = A$ und $BAB = B$

(b) Die Matrizen AB und BA sind Hermitesch.

Wir nennen B auch die *Pseudo-Inverse* oder *Moore-Penrose-Inverse* von A.

Geben Sie Ihre Lösungen zu den Aufgaben in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 11.1 (10 Punkte). Seien U, V, W Vektorräume über K. Zeigen Sie:

(a) Es gibt einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_K(U \otimes V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(U, \mathrm{Hom}_K(V, W)).$$

(b) Es gibt eine natürliche lineare Abbildung

$$U^* \otimes V^* \longrightarrow (U \otimes V)^*$$

und diese ist ein Isomorphismus, falls $\dim_K(U) < \infty$ oder $\dim_K(V) < \infty$ ist.

Aufgabe 11.2 (10 Punkte). Seien V, W Vektorräume über K, und sei $Q \subseteq V \otimes W$ das Bild der bilinearen Abbildung

$$\beta\colon \quad V \times W \longrightarrow V \otimes W, \quad (v, w) \mapsto v \otimes w.$$

(a) Zeigen Sie: Für alle $x \in Q$ und $\lambda \in K$ ist auch $\lambda \cdot x \in Q$.

(b) Wann ist die Abbildung β injektiv? Wann ist sie surjektiv?

(c) Sei nun $V = K^m$ und $W = K^n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Geben Sie eine Beschreibung von

$$Q \subseteq K^m \otimes K^n = K^{mn}$$

durch Gleichungen in den Standardkoordinaten $z_{ij} = x_i y_j$ an.

Aufgabe 11.3 (10 Punkte). Für $A \in \mathrm{Mat}(m \times m, K)$, $B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ bezeichnen wir mit

$$A \otimes B \in \mathrm{Mat}(mn \times mn, K)$$

ihr Kroneckerprodukt. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{rk}(A \otimes B) = \mathrm{rk}(A) \cdot \mathrm{rk}(B)$.

(b) $\mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A) \cdot \mathrm{tr}(B)$.

(c) $\det(A \otimes B) = (\det A)^n \cdot (\det B)^m$.

Zusatzaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind nicht schriftlich abzugeben, sondern zur Diskussion in den Übungsgruppen bestimmt.

Aufgabe 11.4 (keine Abgabe).

(a) Prüfen Sie nach, dass in $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie: Für alle $u, v \in \mathbb{R}^3$ gibt es $x, y \in \mathbb{R}^3$ mit

$$u \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + v \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; x \otimes \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie auch explizite Formeln für x, y abhängig von u, v an!

(c) Für welche $c \in \mathbb{R}$ gilt, dass für alle $u, v \in \mathbb{R}^2$ Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2$ existieren mit

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ c \end{pmatrix} \otimes u + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes v \;=\; \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes x + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes y?$$

Aufgabe 11.5 (keine Abgabe).

(a) Seien V, W Vektorräume. Beweisen Sie für $v \in V$, $w \in W$ die Äquivalenz:

$$v \otimes w \;=\; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v = 0 \;\vee\; w = 0$$

(b) Finden Sie $v_i, w_i \in \mathbb{R}^3$ für $i = 1, 2, 3$, sodass für $u_i = v_i \otimes w_i \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ gilt:

- $u_1 + u_2 + u_3 = 0$,
- keine zwei der Vektoren u_1, u_2, u_3 sind zueinander proportional.

Aufgabe 11.6 (keine Abgabe). Sei $A \in \mathrm{Mat}(m \times m, K)$, $B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$.

(a) Sei $\mathrm{Vec}\colon \mathrm{Mat}(m \times n, K) \longrightarrow K^{mn}$ die Abbildung, die einer Matrix den durch Aneinanderhängen ihrer Spalten gebildeten Spaltenvektor zuordnet. Zeigen Sie für $X \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$:

$$\mathrm{Vec}(AXB) \;=\; (B^t \otimes A) \cdot \mathrm{Vec}(X).$$

(b) Sei $C \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

- $AX - XB = C$.
- $Mv = b$ für $M = \mathbf{1} \otimes A - B^t \otimes \mathbf{1}$ und die Vektoren $v = \mathrm{Vec}(X)$, $b = \mathrm{Vec}(C)$.

Geben Sie Ihre Lösungen zu den Aufgaben in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 12.1 (10 Punkte). Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Es seien Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ gegeben, von denen mindestens drei linear unabhängig sind. Weiter seien Vektoren $w_1, \ldots, w_n \in V$ gegeben mit

$$v_i \wedge v_j \;=\; w_i \wedge w_j \quad \text{für alle} \quad i, j.$$

Zeigen Sie, dass dann ein $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ existiert mit $w_i = \varepsilon \cdot v_i$ für alle i.

Aufgabe 12.2 (10 Punkte). Seien V, W Vektorräume über $K = \mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ und beliebige $f_1, \ldots, f_n \in \operatorname{Hom}_K(V, W)$ gibt es genau eine lineare Abbildung

$$F \;=\; f_1 \wedge \cdots \wedge f_n \;\in\; \operatorname{Hom}_K(\operatorname{Alt}^n(V), \operatorname{Alt}^n(W)),$$

sodass für alle $v_1, \ldots, v_n \in V$ gilt:

$$F(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) \;=\; \tfrac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot f_1(v_{\sigma(1)}) \wedge \cdots \wedge f_r(v_{\sigma(n)}).$$

(b) Die Abbildung $(f_1, \ldots, f_n) \mapsto f_1 \wedge \cdots \wedge f_n$ ist multilinear und symmetrisch.

Aufgabe 12.3 (10 Punkte). Sei V ein Vektorraum endlicher Dimension über $K = \mathbb{Q}$ und sei $f \in \operatorname{End}_K(V)$. Beweisen Sie für die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms

$$\chi_f(t) \;=\; \det\Big(t \cdot \operatorname{id} - f\Big) \;=\; t^n + c_1 t^{n-1} + \cdots + c_{n-1} t + c_n$$

die Formel

$$c_i \;=\; (-1)^i \cdot \operatorname{tr}(\operatorname{Alt}^i(f)) \quad \text{für} \quad 1 \;\leq\; i \;<\; n \;=\; \dim_K(V),$$

indem Sie die Aufgabe 12.2 (b) anwenden auf $f_1 = \cdots = f_n = t \cdot \operatorname{id} - f$.

Zusatzaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind nicht schriftlich abzugeben, sondern zur Diskussion in den Übungsgruppen bestimmt.

Aufgabe 12.4 (keine Abgabe). Sei V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) Für $f \in V^*$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau eine lineare Abbildung

$$\iota_f\colon \quad \mathrm{Alt}^n(V) \longrightarrow \mathrm{Alt}^{n-1}(V),$$

sodass für alle $v_1, \dots, v_n \in V$ gilt:

$$\iota_f(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) \;=\; \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cdot f(v_i) \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_{i-1} \wedge v_{i+1} \wedge \cdots \wedge v_n.$$

(b) Für $x \in \mathrm{Alt}^n(V), y \in \mathrm{Alt}^\bullet(V)$ ist $\iota_f(x \wedge y) = (\iota_f(x)) \wedge y + (-1)^n \cdot x \wedge (\iota_f(y))$.

Aufgabe 12.5 (keine Abgabe). Sei V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) Falls $2 \in K^\times$ ist, sind für $u \in \mathrm{Alt}^2(V)$ folgende Aussagen äquivalent:

- Der Vektor u ist zerlegbar.
- Es ist $u \wedge u = 0$.
- Für alle $f \in V^*$ ist $(\iota_f(u)) \wedge u = 0$.

Was besagt dies im Spezialfall, dass $\dim_K(V) = 3$ ist?

(b) Für höhere alternierende Potenzen gilt dies nicht: Seien $v_1, \dots, v_5 \in V$ linear unabhängig und

$$u \;=\; v_1 \wedge (v_2 \wedge v_3 + v_4 \wedge v_5) \;\in\; \mathrm{Alt}^3(V).$$

Dann ist $u \wedge u = 0$, aber trotzdem ist der Vektor $u \in \mathrm{Alt}^3(V)$ nicht zerlegbar.

Tipp: Bestimmen Sie alle Vektoren $w \in V$ mit $u \wedge w = 0$.

Aufgabe 12.6 (keine Abgabe). Sei V ein K-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $a \in \mathrm{Alt}^n(V) \setminus \{0\}$ ist

$$U_a \;=\; \{\, u \in V \mid u \wedge a = 0 \,\} \;\subseteq\; V$$

ein Untervektorraum der Dimension $\dim_K U_a \leq n$.

(b) Es ist $\dim_K U_a = n$ genau dann, wenn der Vektor $a \in \mathrm{Alt}^n(V)$ zerlegbar ist.

Dieses freiwillige Zusatzblatt dient zur Wiederholung und braucht nicht abgegeben zu werden. Es kann je nach Bedarf in den Zusatztutorien besprochen werden.

Aufgabe 13.1.

(a) Was besagt der Satz von Cayley-Hamilton?

(b) Berechnen Sie A^{25} für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

Aufgabe 13.2.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(b) Sind die Matrizen zueinander ähnlich? Finden Sie ihre Jordan-Normalform.

Aufgabe 13.3.

(a) Bringen Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$$

durch einen geeigneten Basiswechsel in Jordan-Normalform.

(b) Finden Sie eine Basis für den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Folgen $v = (v_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen mit

$$v_{k+1} = -v_k + v_{k-1} + v_{k-2} \quad \text{für alle } k \geq 2.$$

Aufgabe 13.4. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie für $x \in \mathbb{R}$

- die additive Jordan-Chevalley-Zerlegung von xA,
- die Matrix $\exp(xA) \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$.

(b) Lösen Sie die DGL $y'(x) = A \cdot y(x)$ mit dem Anfangswert $y(0) = (1,1,1,1)^t$.

Aufgabe 13.5.

(a) Prüfen Sie, ob die folgenden Matrizen positiv/negativ definit/semidefinit sind:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \\ -8 & 2 & 24 \end{pmatrix}.$$

(b) Finden Sie *im positiv definiten Fall* eine Orthonormalbasis für das durch die jeweilige Matrix bezüglich der Standardbasis in $\mathbb{R}^n$ definierte Skalarprodukt.

Aufgabe 13.6. Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $S \subset \mathbb{C}$ eine Menge von $n+1$ verschiedenen Punkten.

(a) Zeigen Sie, dass auf dem komplexen Vektorraum $V = \{p \in \mathbb{C}[t] \mid \deg(p) \le n\}$ durch

$$\langle p, q \rangle := \sum_{z \in S} p(z)\,\overline{q(z)}$$

ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert wird.

(b) Berechnen Sie für $n = 2$ und $S = \{0, \pm 1\}$ eine Orthonormalbasis von V.

Aufgabe 13.7. Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ mit $A^2 = A$ gegeben. Zeigen Sie, dass A genau dann hermitesch ist, wenn

$$\ker(A) \perp \mathrm{im}(A)$$

gilt (wobei $\perp$ für Orthogonalität bezüglich des Standardskalarproduktes steht).

Aufgabe 13.8. Sei V ein unitärer Vektorraum endlicher Dimension und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass f genau dann normal ist, wenn ein Polynom $p \in \mathbb{C}[t]$ existiert mit

$$f^\dagger = p(f).$$

Hinweis: Für beliebige $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ gibt es ein $p \in \mathbb{C}[t]$ mit $p(\lambda_i) = \overline{\lambda}_i$ für alle i.

Aufgabe 13.9. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt über den reellen oder komplexen Zahlen $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ gilt $\ker(f) = \ker(f^\dagger \circ f)$.

(b) Falls f normal ist, folgt $\ker(f) = \ker(f^\dagger)$ und $\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(f^\dagger)$.

(c) Sind $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ beide normal, dann ist $f \circ g = 0$ äquivalent zu $g \circ f = 0$.

Aufgabe 13.10.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $A^{\mathsf{t}} \cdot A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ für

$$A \;=\; \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 10 & 14 \\ 2 & 2 & 1 \\ -6 & -6 & -3 \\ -16 & 2 & 10 \end{pmatrix} \;\in\; \mathrm{Mat}(4 \times 3, \mathbb{R}).$$

(b) Finden Sie eine Singulärwertzerlegung $A = SDT$ mit $S \in O(4), T \in O(3)$.

Aufgabe 13.11.

(a) Sei $V = \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$b\colon \quad V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (A, B) \longrightarrow \mathrm{tr}(AB)$$

eine symmetrische Bilinearform ist, und bestimmen Sie ihre Signatur (r, s, t).

(b) Bestimmen Sie die Hauptachsen der Quadrik

$$Q \;=\; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 4xy - y^2 = 1\} \;\subseteq\; \mathbb{R}^2$$

und skizzieren Sie diese Quadrik in der reellen Ebene mit Koordinaten (x, y).

Aufgabe 13.12. Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f \in (V \otimes W)^*$ mit den Eigenschaften:

- Für alle $v \in V \setminus \{0\}$ existiert ein $w \in W$ mit $f(v \otimes w) \neq 0$.
- Für alle $w \in W \setminus \{0\}$ existiert ein $v \in V$ mit $f(v \otimes w) \neq 0$.

Zeigen Sie, dass dann $\dim_K(V) = \dim_K(W)$ sein muß.